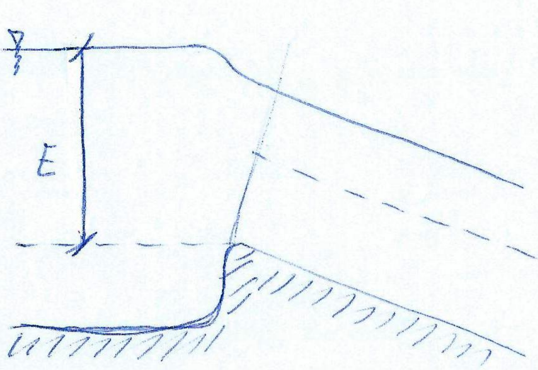
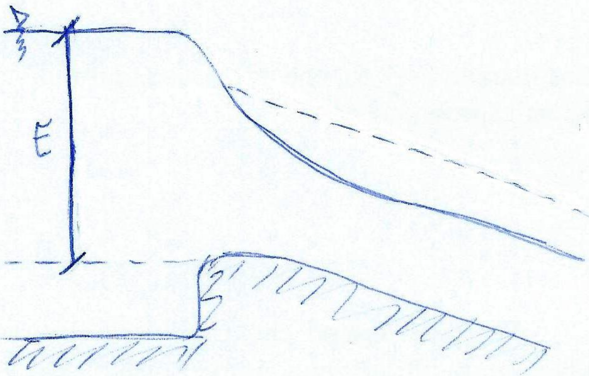
Risalto idraulico e funzione di Bresse: imbocco da serbatoio

In molti casi un corso d'acqua è alimentato da un bacino naturale o artificiale. Non è facile valutare il tipo di moto dell'acqua poiché non si conosce la portata Q. Non si sa se l'alveo sia fluviale o torrentizio:

FLUVIALE



TORRENTIZIO

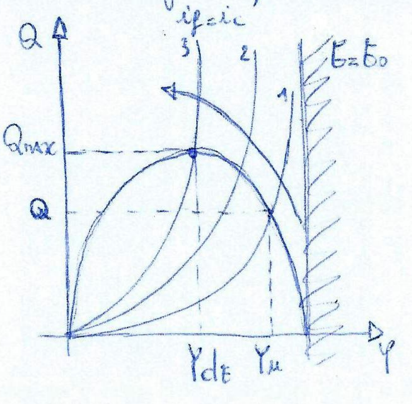


E è il carico disponibile alla corrente nella sezione iniziale:

$$E = Y + \frac{V^2}{2g} = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \qquad E = \text{cost}$$

$$\Rightarrow Q = \Omega\sqrt{2g(E-Y)}$$

A carico assegnato, studiamo la funzione Q al variare di Y:



Dal grafico si evince che tutto dipende dalla pendenza. Nel caso di $Y_u > Y_c$ (alveo fluviale) la pendenza avrà un certo valore $i_f < i_c$ e determinerà una portata Q. Man mano che i_f cresce Q aumenta e Y diminuisce. Q sarà massima per $i_f = i_c$. Se i_f cresce ancora la configurazione diverrà quella torrentizia (e Q rimane Q_{max}).

Le "pseudo-parabole" del grafico (1,2,3) sono state disegnate tenendo conto della diretta proporzionalità $Q \propto Y_u^{5/3}\sqrt{i_f}$

Nel caso di sezione rettangolare ricordiamo che:

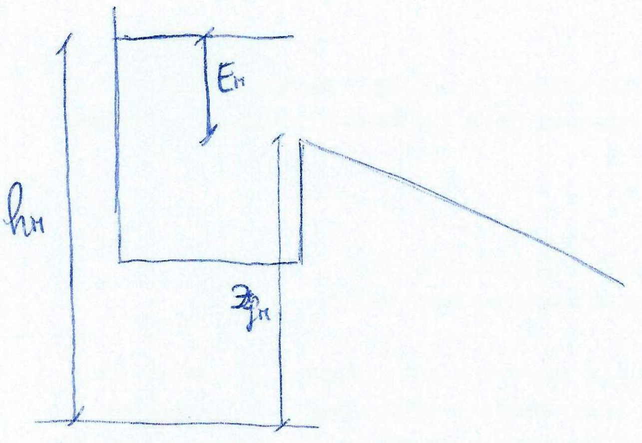
$$Y_c\big|_E = \frac{2}{3}E \qquad Q_{max}\big|_E = \left[\Omega\sqrt{2g(E-Y)}\right]_{Y_c} = bY_c\sqrt{2g\left(\frac{3}{2}Y_c - Y_c\right)} =$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{3}{2}Y_c\big|_E \qquad = bY_c\sqrt{gY_c}$$

Riassumendo:

- alveo torrentizio se $Y_u\big|_{Q_{max}} < Y_c\big|_E \Rightarrow Q = Q_{max}$;
- alveo fluviale se $Y_u\big|_{Q_{max}} > Y_c\big|_E \Rightarrow Q < Q_{max}$.

Introduciamo alcuni dati numerici e un riferimento:



$h_M = E_M + z_{fM} \Rightarrow E_M = h_M - z_{fM}$

$h_M = 10\,m$ $\quad b = 100\,m$ $\quad z_f = 5\,m$

$k_s = 50\,m^{1/3}s^{-1}$

Quindi:

$E_M = 10 - 5 = 5\,m$

$Y_c = \frac{2}{3} E_M = 3{,}3333\,m$

$Q = b\,Y_c \cdot \sqrt{g Y_c} = 1306\,m^3/s$

Determiniamo se l'alveo è fluviale o torrentizio in due casi:

a) $i_f = 0{,}0001$:

$$Y_u|_{max} = \sqrt[5]{\left(\frac{Q_{max}}{b\,k_s\sqrt{i_f}}\right)^3} = 8{,}89\,m$$ nell'ipotesi di alveo infinitamente largo

Confrontando le due seguenti equazioni (da soddisfare per ottenere il moto uniforme di corrente lenta) scopriamo la funzione su cui operare iterativamente:

$$\begin{cases} Q = b\,k_s\sqrt{i_f}\,Y^{5/3} \\ E = E_M = Y + \frac{Q^2}{2g b^2 Y^2} \end{cases} \Rightarrow E_M = Y + \frac{\cancel{b^2} k_s^2\,i_f\,Y^{10/3}}{2g\,\cancel{b^2}\,Y^2} = Y + \frac{k_s^2\,i_f}{2g}Y^{4/3}$$

Quindi:

$$F(Y) = Y + \frac{k_s^2\,i_f}{2g}Y^{4/3} - E_M \Rightarrow F'(Y) = 1 + \frac{4}{3}\frac{k_s^2\,i_f}{2g}Y^{1/3}$$

Iterazione con $Y_0 = E_M$:

n	Y	$F(Y)$	$F'(Y)$	$\varepsilon < 10^{-3}$
0	5	0,1089	1,03	-
1	4,894	$5{,}432 \cdot 10^{-5}$	1,03	0,106
2	4,894	$5{,}432 \cdot 10^{-5}$	1,03	~ 0

L'alveo è quindi fluviale, $Y_u = 4{,}89\,m > 3{,}33\,m = Y_c$. La portata è:

$$Q = \Omega\sqrt{2g(E - Y)} = 705\,m^3/s$$

b) $i_f = 0{,}01$:

$$Y_u|_{Q_{max}} = \left(\frac{Q_{max}}{b\,k_s\sqrt{i_f}}\right)^{3/5} = 2{,}23\,m < 3{,}33\,m = Y_c \Rightarrow \text{alveo torrentizio}$$

Non serve iterazione poiché la corrente raggiunge $Y_u|_{Q_{max}}$. Perciò avrò portata $Q = Q_{max} = 1506\,m^3/s$. Usando la funzione di Bresse:

$cost = -0{,}6046 \quad K = \frac{Y_c}{Y_u} = 1{,}493 \quad y_0 = \frac{Y_0}{Y_u} = \frac{Y_c}{Y_u} = 1{,}49 \quad y = \frac{Y_u(1+0{,}001)}{Y_u} = 1{,}001$

$\phi(y_0) = \frac{0{,}2635 + 0{,}2548}{2} = 0{,}25915 \qquad \phi(y) = 2{,}1837$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{2{,}23}{0{,}01} \cdot \left[(1{,}001 - 1{,}49) - (1 - 1{,}493^3)(0{,}25915 - 2{,}1837)\right] =$$

Gli effetti dell'imbocco si propagano verso valle per 892 m.