

Equazione del moto corrente

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

Equazione di continuità

$$\frac{\partial (R-Q)}{\partial t} + \frac{\partial (RQ)}{\partial x} = 0$$

Per un moto stazionario:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = -j \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost} \end{cases}$$

L'equazione dei profili

Ricordiamo che $H = E + M$. Differenziamo rispetto a x come nelle prime equazioni del sistema:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x} = -j \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial x} - j = -j_f - j$$

In cui j_f , essendo il moto uniforme, $\frac{Q^2}{g y^3} = [C^2 - R^2 K]_{Y=Y_u} = 0$ e usando $\frac{Q^2}{g y^3} = \frac{U^2}{C^2}$, è:

$$j_f = \frac{Q^2}{g y^3} = \frac{U^2}{C^2 g R} = \frac{Q^2}{C^2 R^2 g R} = j_f$$

Nel caso di alveo cilindrico tutte le sezioni hanno la stessa forma ed E è funzione della sola profondità:

$$E = E[Y(x)] \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial x} = j_f - j$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{j_f - j}{\frac{\partial E}{\partial Y} \Big|_{Q=\text{cost}}}$$

Analizziamo tre limiti dell'equazione (motazione y al posto di Y):

- $y \rightarrow y_u \Rightarrow j \rightarrow j_f \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} \rightarrow 0$ // fondo;
- $y \rightarrow y_c \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial Y} \Big|_Q \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} \rightarrow \infty$ $\perp$ fondo;
- $y \rightarrow \infty \Rightarrow j \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} \rightarrow \frac{j_f}{\frac{\partial E}{\partial Y}} \rightarrow j_f$ orizzontale

infatti, in quest'ultimo caso, si tiene conto del fatto che:

$$E = Y + \frac{Q^2}{2g R^2} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial Y} = 1 + \frac{-2 R^{-3} Q^2}{2g} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1$$

Profilo di rotagito: formula valida per $y \neq y_c, y \geq 0$.
 Per un alveo di forma qualunque!

$$\begin{cases} \frac{Q}{\sqrt{g y}} = [C \Omega \sqrt{R}]_{y=y_u} \\ \frac{Q^2}{g} = \left[\frac{\Omega^3}{b} \right]_{y=y_c} \end{cases}$$

Per $y > 0, y \neq y_c$, esprimiamo $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - y'}{\frac{\partial E}{\partial y}|_x}$!

$$y - y' = y \left(1 - \frac{1}{F} \right) \quad j = \frac{\tau_0}{\rho g R} = \frac{V^2}{g R^2} = \frac{Q^2}{C^2 \Omega^2 g R}$$

$$\Rightarrow y - y' = y \left(1 - \frac{Q^2}{g y C^2 \Omega^2 R} \right)$$

Ricordando che $\left(\frac{Q}{\sqrt{g y}} \right)^2 = \frac{Q^2}{g y} = [C^2 \Omega^2 R]_{y=y_u}$!

$$y - y' = y \left(1 - \frac{[C^2 \Omega^2 R]_{y=y_u}}{[C^2 \Omega^2 R]} \right) = y \left(1 - \frac{[C^2 \Omega^2 R]_{y=y_u}}{C^2 \Omega^2 R} \right)$$

Inoltre $E = y + \frac{V^2}{2g} = y + \frac{Q^2}{2g \Omega^2}$!

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial y}|_x &= 1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\Omega^2} \right] = 1 + \frac{Q^2}{2g} \left(-2 \Omega^{-3} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \\ &= 1 - \frac{Q^2 b}{g \Omega^3} = 1 - \frac{[\Omega^3/b]_{y=y_c}}{\Omega^3/b} \end{aligned}$$

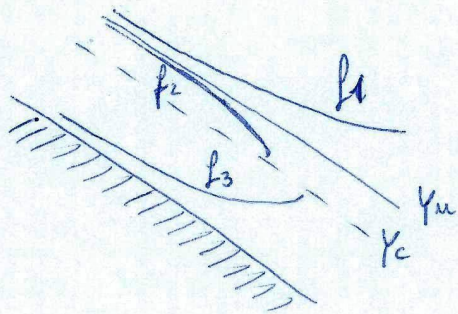
Quindi:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y \frac{\left(1 - \frac{[C^2 \Omega^2 R]_{y=y_u}}{C^2 \Omega^2 R} \right)}{\left(1 - \frac{[\Omega^3/b]_{y=y_c}}{\Omega^3/b} \right)}$$

Profili di rigurgito: alvei fluviale e alvei bonembizati
 Casella con insieme l'equazione:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = i_f \frac{\left(1 - \frac{[C^2 R^2 R]_{Y=Y_u}}{C^2 R^2 R}\right)}{\left(1 - \frac{[-R^3/b]_{Y=Y_c}}{-R^3/b}\right)}$$

1) Alvei fluviale: $i_f < i_c$, $Y_u > Y_c$ ($i_f > 0$, $i_f \neq i_c$):



I caso: $Y_c < Y_u < Y$ (f_1)

$$\Rightarrow N > 0 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0 \text{ (lenta)}$$

$\Rightarrow$ la profondità cresce andando verso valle

II caso: $Y_c < Y < Y_u$ (f_2)

$$\Rightarrow N < 0 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} < 0 \text{ (lenta)}$$

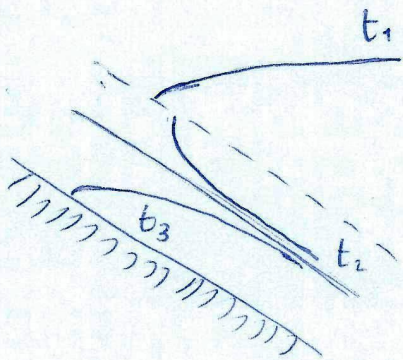
$\Rightarrow$ la profondità decresce andando verso valle

III caso: $Y < Y_c < Y_u$ (f_3)

$$\Rightarrow N < 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0 \text{ (veloce)}$$

$\Rightarrow$ la profondità cresce andando verso valle. Unico caso di corrente veloce per alvei fluviale.

2) Alvei bonembizati: $i_f > i_c$, $Y_u < Y_c$ ($i_f > 0$, $i_f \neq i_c$):



I caso: $Y_u < Y_c < Y$ (b_1)

$$\Rightarrow N > 0 \Rightarrow D > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0 \text{ (veloce)}$$

II caso: $Y_u < Y < Y_c$ (b_2)

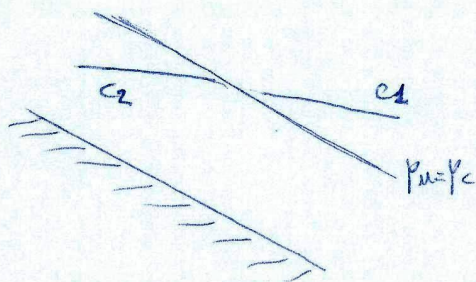
$$\Rightarrow N > 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} < 0 \text{ (veloce)}$$

III caso: $Y < Y_u < Y_c$ (b_3)

$$\Rightarrow N < 0 \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0 \text{ (lenta)}$$

Profili di rugugliato: alveo cubico, alveo orizzontale, alveo acclive
 Ecco alcuni casi:

3) Alveo cubico: $v_f = v_c$, $Y_u = Y_c$



I caso: $Y_c = Y_u < Y$ (C_1).

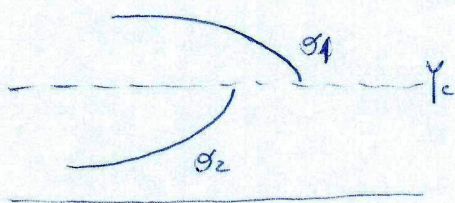
$$\Rightarrow \begin{matrix} N > 0 \\ D > 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0$$

II caso: $Y < Y_u = Y_c$ (C_2):

$$\Rightarrow \begin{matrix} N < 0 \\ D < 0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0$$

Abbiamo ancora sfruttato l'equazione ma per gli alvei benamati visto che $Y \neq Y_u = Y_c$.

4) Alveo orizzontale: $v_f = 0$ ($Y_u \rightarrow \infty$):



$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{v_f - j}{\partial b / \partial Y|_c} = \frac{-j}{\left(1 - \frac{[-Q^3/b] Y = Y_c}{-Q^3/b}\right)}$$

I caso: $Y > Y_c$ (σ_1):

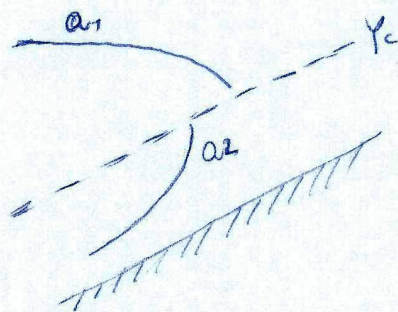
$$\Rightarrow D > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} < 0$$

II caso: $Y < Y_c$ (σ_2)

$$\Rightarrow D < 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0$$

$[N < 0]$
sempre

5) Alveo acclive: $v_f < 0$ (Y_u priva di significato):



$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{v_f - j}{\left(1 - \frac{[-Q^3/b] Y = Y_c}{-Q^3/b}\right)}$$

I caso: $Y > Y_c$ (a_1):

$$\Rightarrow D > 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} < 0$$

II caso: $Y < Y_c$ (a_2):

$$\Rightarrow D < 0 \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial x} > 0$$