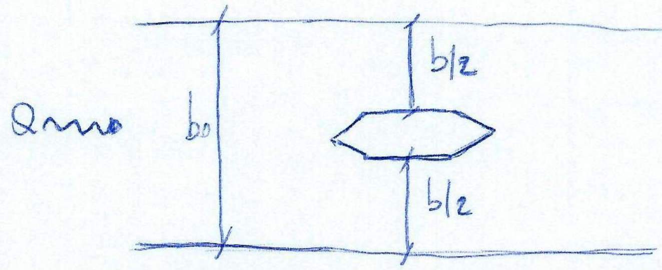
Risalto idraulico e funzione di Bresse: pile di ponte (restringimenti)

La pila di un ponte causa inevitabilmente un restringimento della corrente. Le caratteristiche della corrente indisturbata sono Y_0, b_0, Ω_0, E_0, Fr_0 e Q. È noto il rapporto di restringimento $r = \frac{b}{b_0}$ tra larghezza b_0 e larghezza ristretta b:



Supponiamo che la pila non alteri il carico del moto:

$$H_r = H_0 \quad \Longrightarrow \quad E_r + \eta_r = E_0 + \eta_0$$

La quota del fondo è sempre la stessa, $\eta_r = \eta_0$, quindi:

$$E_r = E_0 \quad \Longrightarrow \quad Y_0 + \frac{Q^2}{2g\,\Omega_0^2} = Y_r + \frac{Q^2}{2g\,\Omega_r^2}$$

Definiamo due rapporti:

$$q_0 = \frac{Q}{b_0} \qquad\qquad q_r = \frac{Q}{b_r}$$

Quindi:

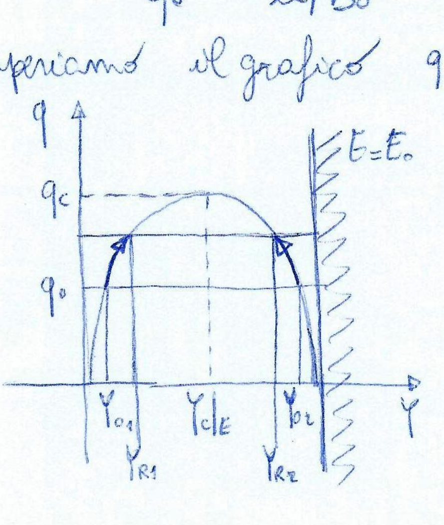
$$Y_0 + \frac{q_0^2}{2g\,Y_0^2} = Y_r + \frac{q_r^2}{2g\,Y_r^2}$$

Notiamo che:

$$\frac{q_r}{q_0} = \frac{\cancel{Q}/b_r}{\cancel{Q}/b_0} = \frac{b_0}{b_r} = \frac{1}{r} \quad \Longrightarrow \quad q_r > q_0 \text{ sempre}$$

poiché $\frac{1}{r} > 1$

Recuperiamo il grafico q, Y di $q = Y\sqrt{2g\,(E-Y)}$:



Data q_R, si ha corrente veloce per Y_{R1}, infatti $Y_{01} < Y_{R1} < Y_c$, e corrente lenta per Y_{R2}, infatti $Y_c < Y_{R2} < Y_{02}$

In particolare:

1) $Y_{01} < Y_{R1} < Y_c$: corrente veloce, deflusso supercritico, alveo torrentizio. La profondità aumenta un po' nel restringimento ($Y_{R1} > Y_{01}$) e poi tende a quella uniforme verso valle con profilo b_2. A valle la profondità è un po' più alta di quella di monte;

2) $Y_c < Y_{R2} < Y_{02}$: corrente lenta, deflusso subcritico, alveo fluviale. La profondità diminuisce un po' nel restringimento ($Y_{R2} < Y_{02}$) e poi si collega a quella di valle. Verso monte il profilo è di tipo f_1: si innalza di un ΔY subito prima del restringimento.

È possibile calcolare l'innalzamento con la relazione di Yarnell (1934):

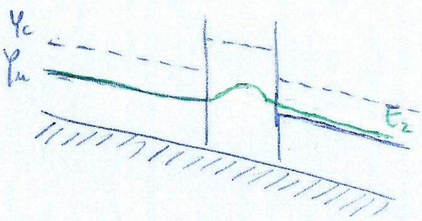
$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = C_y\left(C_y - 0,6 + 5\,Fr_0^2\right)\left[1 - \frac{b}{b_0} + 15\left(1 - \frac{b}{b_0}\right)^4\right] Fr_0^2$$

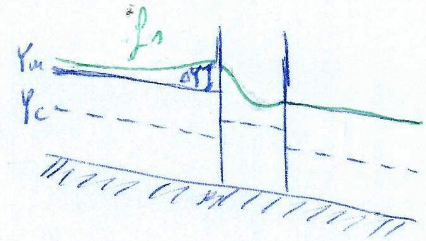
È una formula sperimentale/empirica. C_y varia a seconda della forma della pila:

rettangolare	triangolare	arrotondata
		
$C_y = 1,25$	$C_y = 1,05$	$C_y = 0,95$

Nei due casi visti si ha:

1) TORRENTIZIO $q_R < q_c$ 2) FLUVIALE $q_R < q_c$





La casistica non si esaurisce qui. Infatti può accadere che $q_R > q_c$. In tal caso defluisce la portata massima $q_{max} = q_c$. Quindi si avrà $q_R = q_c$. Perciò:

$$\Omega V_c = \sqrt{g Y_c}\,\Omega \Rightarrow \frac{Q_c}{b} = \frac{\sqrt{g Y_c}\cdot Y_c \cdot \cancel{b}}{\cancel{b}} \Rightarrow q_c = \sqrt{g Y_c^3} = q_R$$

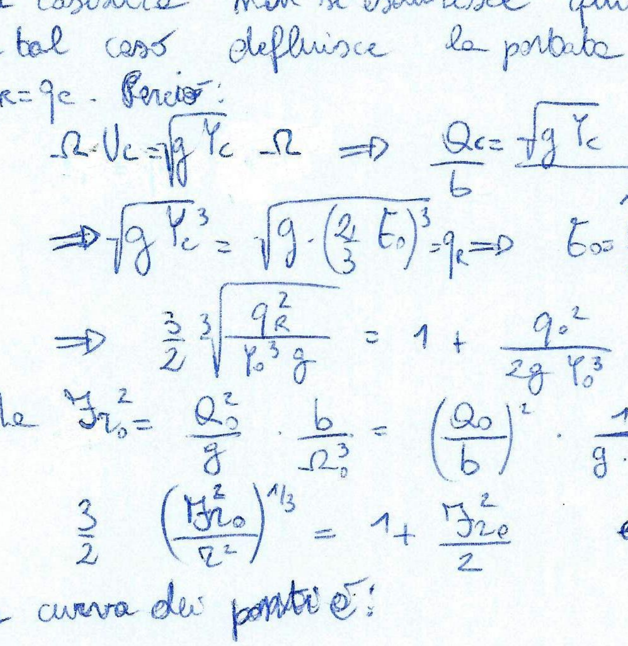
$$\Rightarrow \sqrt{g Y_c^3} = \sqrt{g\cdot\left(\frac{2}{3}E_0\right)^3} = q_R \Rightarrow E_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{q_R^2}{g}\right)^{1/3} = Y_0 + \frac{q_0^2}{2 g Y_0^2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q_R^2}{Y_0^3 g}} = 1 + \frac{q_0^2}{2 g Y_0^3} \Rightarrow \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q_0^2}{r^2 Y_0^3 g}} = 1 + \frac{q_0^2}{2 g Y_0^3}$$ poiché $q_R = \frac{q_0}{r}$

Ma $Fr_0^2 = \frac{Q_0^2}{g}\cdot\frac{b}{\Omega_0^3} = \left(\frac{Q_0}{b}\right)^2\cdot\frac{1}{g\cdot Y_0^3} = \frac{q_0^2}{g Y_0^3}$!

$$\frac{3}{2}\left(\frac{Fr_0^2}{r^2}\right)^{1/3} = 1 + \frac{Fr_0^2}{2}$$ equazione della curva dei ponti

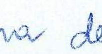
La curva dei ponti è:



$Y_M = k_r \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2 Fr_M'^2}}$ $Y_V = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2 Fr_M'^2}}$

$Fr_M^2 = \frac{q_0^2}{g Y_M^3}$ $Fr_V^2 = \frac{q_0^2}{g Y_V^3}$

Si ha:

		
$k_r = 1,135$	$k_r = 1,085$	$k_r = 1,050$

Definiamo Fr'_{LIM} e Fr''_{LIM} in relazione alle varie zone:

- I: valori di Fr_0 minore di Fr'_{LIM} (valore di soglia definito dal ramo ascendente della curva). La corrente indisturbata è lenta e il rapporto di restringimento è abbastanza elevato affinché nel restringimento si abbia deflusso subcritico:

$$Fr_0 < 1 ,\quad Fr < Fr'_{LIM} \Rightarrow q < q_{max} \Rightarrow Y_r = Y_0 + \Delta Y \quad (\Delta Y \text{ di Yarnell})$$

- II: valori di Fr_0 maggiori di Fr'_{LIM}, ma minori di 1. Siamo nel caso fluviale con transizione. Il rapporto r è troppo basso per consentire il passaggio indisturbato della corrente:

$$Fr_0 < 1 ,\quad Fr > Fr'_{LIM} \Rightarrow q = q_{max} \Rightarrow$$

- III: valori di Fr_0 minori di Fr''_{LIM} (valore di soglia definito dal ramo discendente della curva). La corrente indisturbata è veloce e il rapporto di restringimento è troppo basso per mantenere il carico specifico indisturbato:

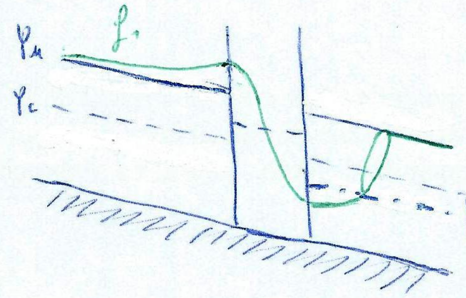
$$Fr_0 > 1 ,\quad Fr < Fr''_{LIM} \Rightarrow q = q_{max} \Rightarrow Y_r =$$

- IV: valori di Fr_0 maggiori di Fr''_{LIM}. La corrente indisturbata è veloce e il rapporto r è abbastanza elevato affinché il deflusso attraverso il restringimento rimanga supercritico:

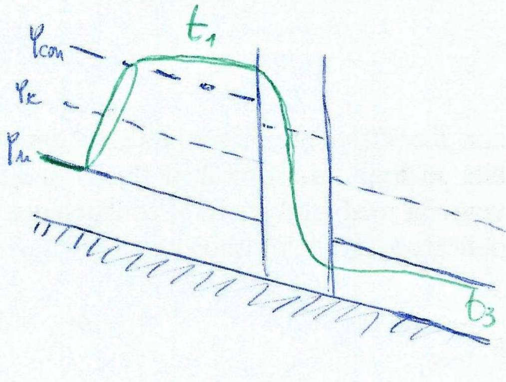
$$Fr_0 > 1 ,\quad Fr > Fr''_{LIM} \Rightarrow q < q_{max} \Rightarrow Y_r = Y_0$$

Schematicamente i casi II e III sono:

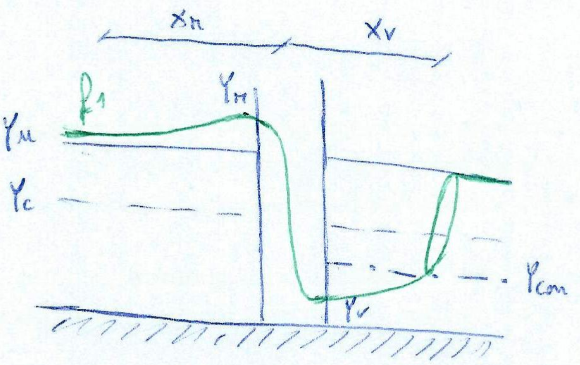
II)



III)



Esercizio su pile di ponte con risalto a valle:



$Q = 600\ m^3/s \qquad k_s = 35\ m^{1/3}\,s^{-1}$

$b_0 = 100\ m \qquad b = 80\ m$

$i_f = 0{,}0050$

$r = \dfrac{b}{b_0} = 0{,}80$

Per alveo rettangolare infinitamente largo:

$$Y(u) = \left(\frac{Q}{b_0 k_s \sqrt{i_f}}\right)^{3/5} = 1{,}70\ m$$

Per alveo rettangolare:

$$Y(c) = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b_0^2}} = 1{,}54\ m < 1{,}70\ m = Y(u) \Rightarrow \text{alveo fluviale}$$

Quindi:

$$Fr_0^2 = \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{b_0}{\Omega_0^3} = 0{,}747 \Rightarrow Fr_0 = 0{,}864$$

$$Y_{con}(Y_u) = Y_u \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_0^2}}{2} = 1{,}39\ m$$

$$Fr_{con}^2 = \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{b_0}{\Omega_{con}^3} = 1{,}37 \Rightarrow Fr_{con} = 1{,}17$$

Dal grafico entrando con Fr_0 e r:

$Fr'_{lim} = 0{,}53 \qquad Fr''_{lim} = 1{,}75 \qquad k_r = 1{,}135$ per pile rettangolari

$$\Rightarrow Y_V = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2 Fr''^2_{lim}}} = 1{,}09\ m \qquad Y_M = k_r \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2 Fr'^2_{lim}}} = 2{,}67\ m$$

Ponendo ora $x_0 = 0$, usiamo la formula di Bresse per calcolare gli effetti sulla corrente del ponte. Partiamo da monte:

$K = \dfrac{Y_c}{Y_u} = 0{,}906 \qquad \cos t = -0{,}6046 \qquad y_0 = \dfrac{Y_M}{Y_u} = 1{,}57 \qquad y = \dfrac{Y_u(1{,}01)}{Y_u} = 1{,}01$

$\phi(y_0) = \dfrac{0{,}2389 + 0{,}2315}{2} = 0{,}2352 \qquad \phi(y) = 1{,}4192$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{Y_u}{i_f}\left\{(y - y_0) - (1 - K^3)\left[\phi(y) - \phi(y_0)\right]\right\} \simeq -294\ m = X_M$$

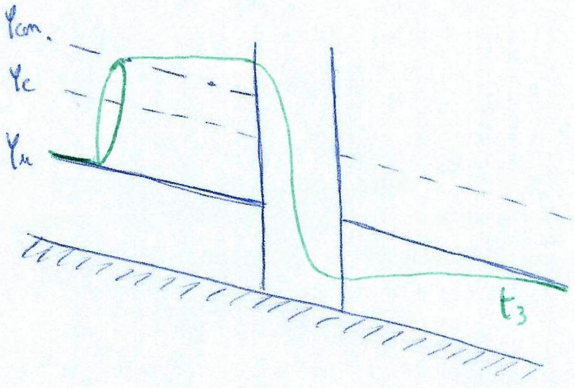
Passiamo agli effetti a valle:

$K = \dfrac{Y_c}{Y_u} = 0{,}906 \qquad \cos b = -0{,}6046 \qquad y_0 = \dfrac{Y_V}{Y_u} = 0{,}62 \qquad y = \dfrac{Y_{con}}{Y_u} = 0{,}82\ m$

$\phi(y_0) = 0{,}0584 \qquad \phi(y) = 0{,}3886$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{Y_u}{i_f}\left\{(y - y_0) - (1 - K^3)\left[\phi(y) - \phi(y_0)\right]\right\} \simeq 39\ m = X_V$$

Esercizio su pila di ponte con risalto a monte:



$Q = 600\ m^3/s$ $\quad k_s = 35\ m^{1/3}\ s^{-1}$

$b_0 = 100\ m$ $\quad b = 80\ m$

$i_f = 1{,}20\% = 0{,}0120$

$r = b/b_0 = 0{,}8$

Per alveo rett. inf. largo:

$Y_u = \left(\dfrac{Q}{b_0 k_s \sqrt{i_f}}\right)^{3/5} = 1{,}31\ m$ $\quad Y_c = \sqrt[3]{\dfrac{Q^2}{g\, b_0^2}} = 1{,}54\ m$

$Fr_0^2 = \dfrac{Q^2}{g} \cdot \dfrac{b_0}{\Omega^3} = 1{,}63 \Rightarrow Fr_0 = 1{,}28$

L'alveo è torrentizio, inoltre:

$$Y_{con} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_0^2}}{2} \cdot Y_u = 1{,}80\ m$$

Dal grafico:

$Fr'_{cm} = 0{,}53$ $\quad Fr''_{cm} = 1{,}75$ $\quad k_r = 1{,}135$ per pile rettangolari

$\Rightarrow Y_m = \sqrt[3]{\dfrac{Q^2}{g b_0^2\, Fr'^2_{cm}}} \cdot k_r = 2{,}67\ m$ $\quad Y_v = \sqrt[3]{\dfrac{Q^2}{g\, b^2\, Fr''^2_{cm}}} = 1{,}06\ m$

Formula di Bresse ($x_0 = 0{,}00\ m$):

- a monte:

$K = \dfrac{Y_c}{Y_u} = 1{,}176$ $\quad y = \dfrac{Y_{con}}{Y_u} = 1{,}37$ $\quad y_0 = \dfrac{Y_m}{Y_u} = 2{,}04$ $\quad \cos\theta = -0{,}6046$

$\phi(y_0) = 0{,}1263$ $\quad \phi(y) = \dfrac{0{,}3285 + 0{,}3158}{2} = 0{,}32215$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{Y_u}{i_f}\left\{(y - y_0) - (1 - K^3)\left[\phi(y) - \phi(y_0)\right]\right\} \cong 60\ m = x_m$$

- a valle:

$K = 1{,}176$ $\quad y = \dfrac{Y_u(1 + 0{,}01)}{Y_u} = 1{,}01$ $\quad y_0 = \dfrac{Y_v}{Y_u} = 0{,}81$ $\quad \cos\theta = -0{,}6046$

$\phi(y) = 1{,}4192$ $\quad \phi(y_0) = \dfrac{0{,}3459 + 0{,}3886}{2} = 0{,}36725$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{Y_u}{i_f}\left\{(y - y_0) - (1 - K^3)\left[\phi(y) - \phi(y_0)\right]\right\} \cong 34\ m = x_v$$