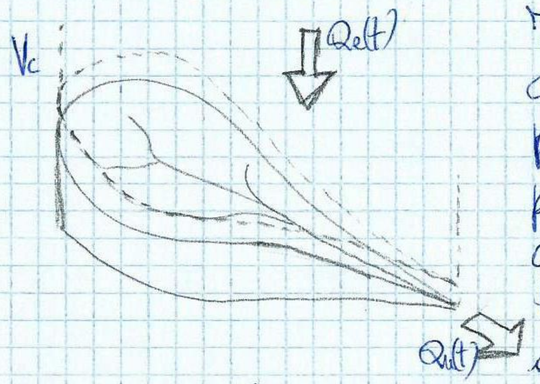
Modellazione Afflussi-Deflussi (MAD)

Nella maggior parte dei casi non abbiamo a disposizione misure dirette di portata dei corsi d'acqua. Sul territorio sono tuttavia presenti numerosi pluviometri. L'idea è quindi quella di ottenere valori di portate non misurati a partire dalle intensità di pioggia misurate dai pluviometri. L'intensità di pioggia ha le dimensioni di una velocità: altezza di pioggia caduta nel tempo. Si definisce anzitutto il bacino idrografico:



Il bacino è dato dal cilindro che proietta lo spartiacque sul piano orizzontale che passa per la foce. È delimitato superiormente da una superficie parallela al piano di campagna alta qualche metro in modo da comprendere la vegetazione. Nel sottosuolo si spinge fino a qualche decina di metri (talvolta si considera non il piano orizzontale di base, ma una superficie parallela al piano di campagna nel sottosuolo).

Piove e nel bacino entra acqua. La pioggia non è tuttavia uniforme su tutto il territorio e in più ne abbiamo misurazioni solo nei punti in cui stanno i pluviografi. Si deve fare una media pesata delle intensità $i_k(t)$ misurate rispetto all'area di competenza di ciascun pluviografo. Si divide infatti in varie zone la superficie del bacino associando a ciascuna di esse l'intensità di pioggia misurata dal pluviografo più vicino:

$$Q_e(t)=\int_A i(x,y,z)\,dA \Rightarrow Q_e(t)\cong A\cdot\sum_{k=1}^{N} p_k\cdot i_k(t)$$

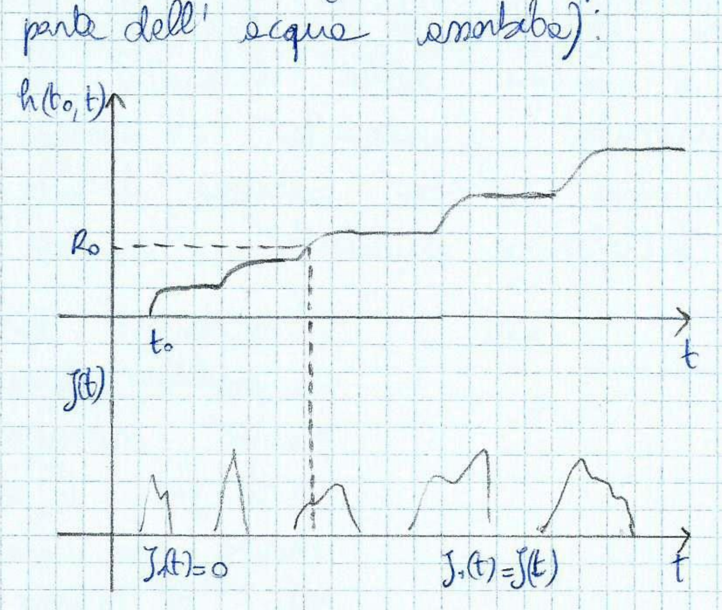
Si introduce così l'intensità media:

$$J(t)=\frac{Q_e(t)}{A}\cong\sum_{k=1}^{N} p_k\cdot i_k(t)$$

Una parte della pioggia viene assorbita dalla vegetazione:

$$R_0=\int_0^{t_a} J(t)\,dt$$

L'acqua raggiunge il terreno solo dopo che la vegetazione è satura. Per semplicità immaginiamo che la vegetazione non perda acqua per evaporazione tra una piena e quella successiva (in realtà le piante cedono continuamente parte dell'acqua assorbita).



Il modello di Horton

Lo studio di come e in quale misura la pioggia infiltri nel terreno o ruscelli sopra di esso non è cosa facile. In primo luogo dobbiamo notare che non vi è linearità tra le cause e gli effetti, tra l'intensità di pioggia e il ruscellamento superficiale. Se un terreno ha ad esempio capacità di infiltrazione di 9 mm/h e piovono 10 mm/h si avrà ruscellamento pari a 1 mm/h. Ma se piovono 12 mm/h, cioè se la pioggia aumenta del 20%, l'intensità ruscellante sarà di 3 mm/h, cioè subirà un aumento del 300%. Detto ciò sviluppiamo l'analisi del modello di Horton (1933).

Esso si applica a un terreno inizialmente asciutto che viene irrigato fino a raggiungere ruscellamento continuo ("ponding" permanente). L'intensità di infiltrazione scoperta da Horton è data da:

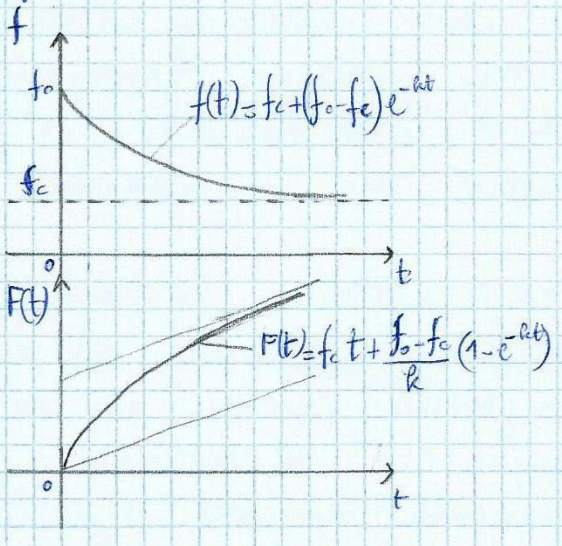
$$f(t) = f_c + (f_0 - f_c) \cdot e^{-kt}$$

L'intensità di pioggia deve essere costantemente maggiore della velocità di infiltrazione. La quantità filtrata sarà:

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t \left[f_c + (f_0 - f_c) \cdot e^{-k\tau}\right] d\tau = \left[f_c \tau + (f_0 - f_c) \cdot \frac{e^{-k\tau}}{-k}\right]_0^t =$$

$$= f_c t + \frac{f_0 - f_c}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Graficamente:



Horton ha determinato sperimentalmente i parametri f_0, f_c e k per vari tipi di terreno. Tuttavia le formule viste valgono solo nelle condizioni di Horton, che nella realtà non si verificano frequentemente.

Notiamo però che tra $f(t)$ e $F(t)$ esiste una sorta di "legame costitutivo", una biunivocità che associa sempre le stesse coppie di valori delle due funzioni. Per esplicitare tale aspetto eliminiamo il tempo:

$$e^{-kt}=\frac{f(t)-f_c}{f_0-f_c} \Rightarrow t=-\frac{1}{k}\cdot\ln\frac{f(t)-f_c}{f_0-f_c}=\frac{1}{k}\ln\frac{f_0-f_c}{f(t)-f_c}$$

$$\Rightarrow F(t)=\frac{f_c}{k}\cdot\ln\frac{f_0-f_c}{f(t)-f_c}+\frac{f_0-f_c}{k}\left(1-\frac{f(t)-f_c}{f_0-f_c}\right)=\frac{f_c}{k}\ln\frac{f_0-f_c}{f(t)-f_c}+\frac{\cancel{f_0-f_c}}{k}\,\frac{f_0-f(t)}{\cancel{f_0-f_c}}=$$

$$=\frac{f_c}{k}\ln\frac{f_0-f_c}{f(t)-f_c}+\frac{f_0-f(t)}{k}$$

Abbiamo evidenziato che è possibile legare f a F per un determinato tempo t, ma indipendentemente dal momento in cui si realizzano. Ciò ci consente di trasferire le formule valide nelle condizioni di Horton, opportunamente modificate, in condizioni differenti.

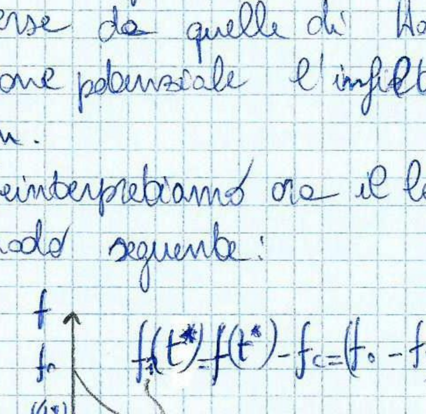
Ipotizziamo di avere un'intensità di pioggia costante $j_1(t)$ nel tempo Δt. Per la stazionarietà possiamo porre arbitrariamente l'inizio per $t_0=0$.

Dobbiamo considerare due diverse sequenze temporali: quella della pioggia reale esaminata e quella dell'esperienza di Horton. Usiamo t per la prima e t^* per la seconda. Per il terreno reale conosciamo le caratteristiche f_0, f_c e k e l'intensità di pioggia j_1. Dobbiamo anche conoscere quale sia lo stato iniziale del terreno: avremo a disposizione $F(0)$ o la capacità di infiltrazione $f(0)$.

Riferendoci ora all'esperienza di Horton, possiamo porfare di altezza infiltrata fino all'istante t^*. Ma se guardiamo il caso reale, avrà senso parlare di altezza infiltrata $F(0)$? No, perché non sappiamo il momento da cui si deve partire. Quindi, di fatto, tra $F(0)$ e $f(0)$ l'informazione di cui disporremo sarà la capacità di infiltrazione $f(0)$.

L'acqua non ruscellante, cioè infiltrata, si divide in una parte catturata dal suolo J_2 e un'altra che raggiunge la falda profonda J_3. In generale conoscere un terreno significa sapere quanta acqua c'è al suo interno perché da essa (J_2) dipende la "rimanente" capacità di infiltrazione. Ora, quest'ultima può essere potenziale o effettiva: la prima è quella massima possibile e si realizza solo se l'intensità di pioggia è superiore alla capacità di infiltrazione, la seconda è l'infiltrazione che si realizza attualmente. Nel terreno di Horton l'infiltrazione effettiva coincide sempre con quella potenziale. Pertanto possiamo ottenere informazioni su un terreno in condizioni anche molto diverse da quelle di Horton considerando come sua infiltrazione potenziale l'infiltrazione effettiva del terreno di Horton.

Reinterpretiamo ora il legame biunivoco tra $f(t^*)$ e $F(t^*)$ nel modo seguente:



$$f_1(t^*) = f(t^*) - f_c = (f_0 - f_c)\, e^{-kt^*}$$

$$H_1(t^*) = F(t^*) - f_c t^* = \frac{f_0 - f_c}{k}\left(1 - e^{-kt^*}\right)$$

Ricaviamo t^* da $H_1(t^*)$:

$$t^* = -\frac{1}{k} \ln\left[1 - \frac{k\, H_1(t^*)}{f_0 - f_c}\right]$$

Sostituiamo in $f(t^*)$:

$$f(t^*) = f_1(t^*) + f_c = f_c + (f_0 - f_c)\, e^{-kt^*}$$

$$\Rightarrow f(t^*) = f_c + (f_0 - f_c)\left[1 - \frac{k H_1(t^*)}{f_0 - f_c}\right] =$$

$$= f_c + f_0 - f_c - k H_1(t^*) =$$

$$= f_0 - k H_1(t^*)$$

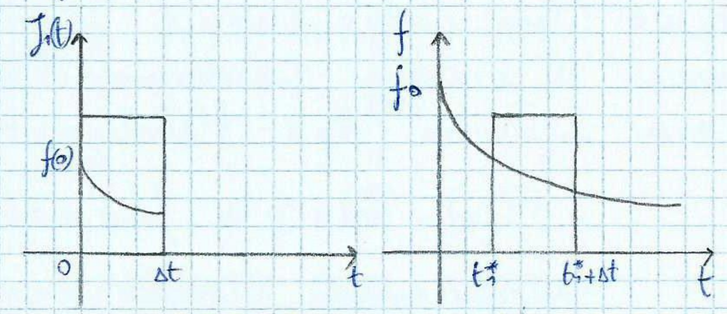
La capacità di infiltrazione iniziale si ottiene per $t^* = 0$:

$$f(0) = f_0 - k H_1(0)$$

H_1 si ottiene per pesatura di un campione indisturbato di

terreno prima e dopo l'essiccatura: è l'altezza d'acqua presente nel suolo. Non ha invece senso calcolare quella totale infiltrata all'infuori delle condizioni di Horton.
Si verificano due casi, dei quali il secondo si divide a sua volta in due possibilità:

- I caso: l'intensità di pioggia è superiore alla capacità di infiltrazione, $J_1 > f(0)$. Siamo in condizioni simili a quelle di Horton, tuttavia con una differenza: mentre il terreno di Horton parte da $f(0)$ (terreno completamente asciutto), quello reale ha un passato descritto dai valori $f(0)$ e $F(0)$. Il terreno di Horton raggiunge le condizioni di quello reale dopo un tempo t^* a partire dal $t=0$ (per cui si inizia a osservare quello reale):



$$t_1^* = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{f_0-f_c}{f(0)-f_c}\right)$$

Al termine dell'intervallo Δt possiamo calcolare il contenuto d'acqua con la formula di Horton:

$$F(\Delta t) = f_c(t^*+\Delta t) + \frac{f_0-f_c}{k}\left(1-e^{-k(t^*+\Delta t)}\right)$$

L'intensità media di infiltrazione sarà:

$$J_2 = \frac{F(\Delta t)-F(0)}{\Delta t}$$

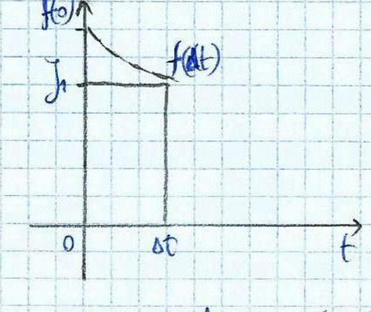
Se J_1, J_2 e J_3 sono rispettivamente l'altezza di pioggia che raggiunge il terreno, l'altezza che riesce ad infiltrarsi e l'altezza ruscellante:

$$J_1\Delta t = J_2\Delta t + J_3\Delta t \Rightarrow J_3 = J_1 - \frac{F(\Delta t)-F(0)}{\Delta t}$$

- II caso: l'intensità di pioggia è inferiore alla capacità di infiltrazione, $J_1 \le f(0)$. Per un certo tratto temporale tutta la pioggia si infiltrerà nel suolo. Tuttavia, se l'intensità è superiore a f_c a un certo punto inizierà il ponding, se è inferiore a f_c esso non si manifesterà mai, per qualsiasi durata della pioggia.

Altro nodo fondamentale è giocato dalla durata Δt. Limitandoci al caso $J_1 > f_c$, se $\Delta t < t_p$, con t_p tempo dopo il quale inizia il ponding, non ci sarà ponding, altrimenti, se $\Delta t > t_p$, sì! Abbiamo quindi due possibilità:

- I possibilità: $t_p > \Delta t$. Tutta l'acqua si infiltra:



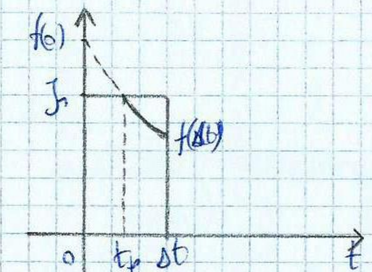
$$F(\Delta t) = F(0) + J_1 \Delta t$$

$$J_2 = J_1 \qquad J_3 = 0$$

$$f(\Delta t) > J_1$$

$$F(\Delta t) = \frac{f_c}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{f(\Delta t) - f_c} + \frac{f_0 - f(\Delta t)}{k} < \frac{f_c}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{J_1 - f_c} + \frac{f_0 - J_1}{k} = F(J_1)$$

- II possibilità: $t_p < \Delta t$. Una parte d'acqua si infiltra, la restante genera il ponding. Dividiamo il fenomeno in due parti, una di durata t_p e l'altra $\Delta t - t_p$!



$$F(t_p) = F(0) + J_1 t_p \quad \text{fino a } t_p$$

Successivamente il terreno si comporta alla Horton. Riconducendoci al terreno di Horton e detto t_p^* il tempo necessario affinché esso raggiunga capacità di infiltrazione pari all'intensità di pioggia (t.c. $f(t_p^*) = J_1$):

$$t_p^* = \frac{1}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{J_1 - f_c} \Rightarrow t_2^* = t_p^* + (\Delta t - t_p)$$

$$\Rightarrow F(\Delta t) = f_c \cdot t_2^* + \frac{f_0 - f_c}{k} \left(1 - e^{-k t_2^*}\right)$$

Valgono inoltre:

$$F(\Delta t) = \frac{f_c}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{f(\Delta t) - f_c} + \frac{f_0 - f(\Delta t)}{k} < \frac{f_c}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{J_1 - f_c} + \frac{f_0 - J_1}{k} = F(J_1)$$

$$J_3 = J_1 - J_2$$

In entrambi i casi valgono ancora le seguenti formule:

$$J_2 = \frac{F(\Delta t) - F(0)}{\Delta t} \Rightarrow J_3 = J_1 - \frac{F(\Delta t) - F(0)}{\Delta t}$$

t_p si ricava dalla formula seguente:

$$F(t_p) = \frac{f_c}{k} \ln \frac{f_0 - f_c}{J_1 - f_c} + \frac{f_0 - J_1}{k} = F(0) + J_1 t_p$$

Il modello di infiltrazione del SCS

Il Soil Conservation Service (SCS) statunitense propone un modello che considera l'altezza di pioggia totale P suddividendola in altezza catturata dalla vegetazione I_a, altezza catturata dal suolo F_a e altezza efficace che produce il deflusso P_e:

$$P = I_a + F_a + P_e$$

La pioggia efficace P_e non può mai superare il valore $P - I_a$; F_a non può mai superare un certo valore limite che chiamiamo S. La regola fondamentale del modello è la seguente, basata sull'uguaglianza dei rapporti tra i valori attuali e quelli massimi:

$$\frac{P_e}{P - I_a} = \frac{F_a}{S}$$

Sostituendo $F_a = P - I_a - P_e$:

$$\frac{P_e}{P - I_a} = \frac{P - I_a - P_e}{S} \iff P_e S = (P - I_a)^2 - P_e(P - I_a)$$

$$\iff P_e = \frac{(P - I_a)^2}{P + S - I_a}$$

S può considerarsi una caratteristica costante del terreno, mentre I_a dipende dalle stagioni, che condizionano l'aspetto della vegetazione. Notiamo che nel modello di Horton non compariva la parte intercettata dalla vegetazione. S e P sono note, ma rimangono due incognite: quella principale, P_e, e quella "incerta", I_a. Per superare il problema si pone, abbastanza arbitrariamente, $I_a = 0{,}2\,S$:

$$P_e = \frac{(P - 0{,}2\,S)^2}{P + 0{,}8\,S}$$

Equazione valida solo per $P > I_a$, altrimenti $P_e = 0$.

Il modello SCS ha il vantaggio di poter catalogare, attraverso S, qualsiasi tipo di terreno. S ha quindi una variabilità vastissima. Si introduce allora un parametro, chiamato Curve Number (per questo il metodo SCS è anche detto metodo CN) e, seppur con un piccolo bisticcio dimensionale, si pone:

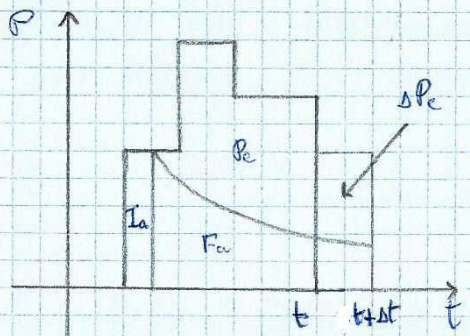
$$S = 25{,}4\left(\frac{1000}{CN} - 10\right)$$

Il modello di Horton permetteva di calcolare diretta-

mentre le intensità medie efficaci di pioggia superficiale.
Possiamo tuttavia, nel modello SCS, calcolare la pioggia efficace per determinati intervalli di tempo, a partire da un $t_0 = 0$ uguale per tutti:

$$P_e(t) = \frac{(P(t) - 0{,}2S)^2}{P(t) + 0{,}8S} \qquad P_e(t+\Delta t) = \frac{(P(t+\Delta t) - 0{,}2S)^2}{P(t+\Delta t) + 0{,}8S}$$

Facendo la differenza otteniamo l'altezza di pioggia efficace relativamente all'intervallo "delimitato" dalle due altezze efficaci:



$$J_e = \frac{P_e(t+\Delta t) - P_e(t)}{\Delta t}$$

Intensità di pioggia efficace J_e tra t e $t+\Delta t$.

È molto difficile fornire un unico valore di S invariante per tutto l'anno, anche perché ogni S è dato da un unico CN. Si definiscono allora tre diversi CN. Finora abbiamo parlato di quello tabellato, che si indica con CN(II) e si riferisce a condizioni normali di umidità del terreno. Si definiscono, a partire da tale CN(II), altri due CN a seconda delle condizioni:

- (stesso) terreno asciutto:

$$CN(I) = \frac{4{,}2\, CN(II)}{10 - 0{,}058 \cdot CN(II)}$$

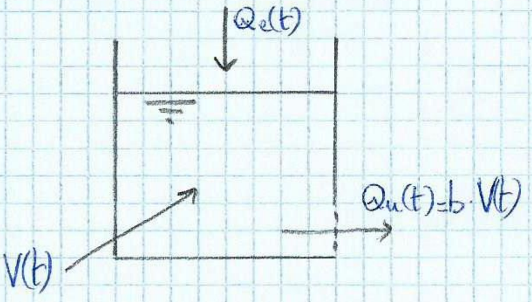
- (stesso) terreno bagnato:

$$CN(III) = \frac{23\, CN(II)}{10 + 0{,}13\, CN(II)}$$

Il volume d'invaso lineare

La modellazione Afflussi-Deflussi ci permette di legare le portate di un corso d'acqua alle piogge del suo bacino di alimentazione. Si ricavano portate a livello probabilistico partendo da quelle delle piogge.
I modelli che abbiamo introdotto sono di tipo deterministico (cioè le variabili di input assumono valori fissi, a differenza del tipo stocastico, in cui i valori sono variabili) e a ingressi concentrati (non distribuiti). Aggiungiamo anche che sono concettuali: partono da una legge fisica (l'equazione di continuità: $\frac{dV}{dt} = Q_e - Q_u$) per descrivere i fenomeni. Tale legge fondamentale viene accompagnata da leggi di tipo empirico. Per contro, i modelli cosiddetti "empirici" stabiliscono un legame puramente numerico tra le funzioni di ingresso e di uscita. Infine quelli fisicamente basati ricorrono alle sole leggi della fisica.

L'unico dato noto nell'equazione di continuità è la portata entrante. Q_u e $\frac{dV}{dt}$ sono incognite e non esiste tra esse alcuna biunivocità. Se però dividiamo il bacino in tanti sotto-bacini sarà più facile studiare il legame tra Q_u e $\frac{dV}{dt}$ e accettare la biunivocità tra le stesse. Addirittura accettiamo che tale legame sia di tipo lineare. Introduciamo quindi il modello del volume d'invaso lineare:



$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = Q_e - Q_u \\ Q_u(t) = b \cdot V(t) \end{cases}$$

Sostituiamo e integriamo:

$$\frac{dV}{dt} + b \cdot V(t) = Q_e \Rightarrow \lambda \frac{dV}{dt} + \lambda b \cdot V(t) = \lambda Q_e, \quad \lambda = \lambda(t)$$

Cerchiamo la funzione $\lambda(t)$ tale che:

$$\lambda = f \quad e \quad \frac{d\lambda}{dt} = b\lambda$$

Scegliamo quindi $\lambda(t) = C \cdot e^{bt}$. Si ha, $\forall C$ (scegliamo $C=1$):

$$e^{bt} \cdot \frac{dV}{dt} + b \cdot e^{bt} \cdot V = e^{bt} \cdot Q_e \Rightarrow \frac{d(V \cdot e^{bt})}{dt} = Q_e \, e^{bt}$$

Integrando otteniamo:

$$\int_0^t d(V \cdot e^{b\tau}) = \int_0^t e^{b\tau} \cdot Q_e(\tau) \cdot d\tau \Leftrightarrow V(t) \cdot e^{bt} - V(0) = \int_0^t e^{b\tau} \cdot Q_e(\tau) \cdot d\tau$$

$$\Rightarrow V(t) = V(0) \cdot e^{-bt} + e^{-bt} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot e^{b\tau} \cdot d\tau$$

Ricordando che $Q_u(t) = b V(t)$:

$$Q_u(t) = V(0) \cdot b \cdot e^{-bt} + e^{-bt} \cdot \int_0^t b \cdot e^{b\tau} \cdot Q_e(\tau) \cdot d\tau =$$

$$= Q_u(0) \cdot e^{-bt} + e^{-bt} \int_0^t Q_e(\tau) \cdot b \cdot e^{b\tau} d\tau$$

Usando un sistema in cui la portata entrante è costante a tratti, in ogni intervallo useremo come portata iniziale la portata alla fine dell'intervallo precedente. Basta quindi che sia nota la portata entrante all'inizio dell'evento che si desidera studiare: le altre si otterranno dai calcoli. Per un singolo intervallo, indicando con Q_0 la portata entrante costante:

$$Q_u(t) = Q_u(0) \cdot e^{-bt} + e^{-bt} \cdot Q_0 \int_0^t b \cdot e^{b\tau} d\tau =$$

$$= Q_u(0) \cdot e^{-bt} + b \cdot e^{-bt} \cdot Q_0 \cdot \frac{1}{b} \cdot (e^{bt} - 1) =$$

$$= Q_u(0) \cdot e^{-bt} + Q_0 \cdot (1 - e^{-bt})$$